Université Mohammed Premier, Oujda
Ecole Nationale des Sciences Appliquées d'Al-Hoceima
(ENSAH)

Module AP42 : Intégrales Multiples et Formes Différentielles

Polycopié du Cours

Fouzia MORADI

Année Préparatoire, 2ème année

Intégrales dépendants d'un paramètre, Intégrales multiples, Formes différentielles et Intégrales curvilignes.

Table des matières

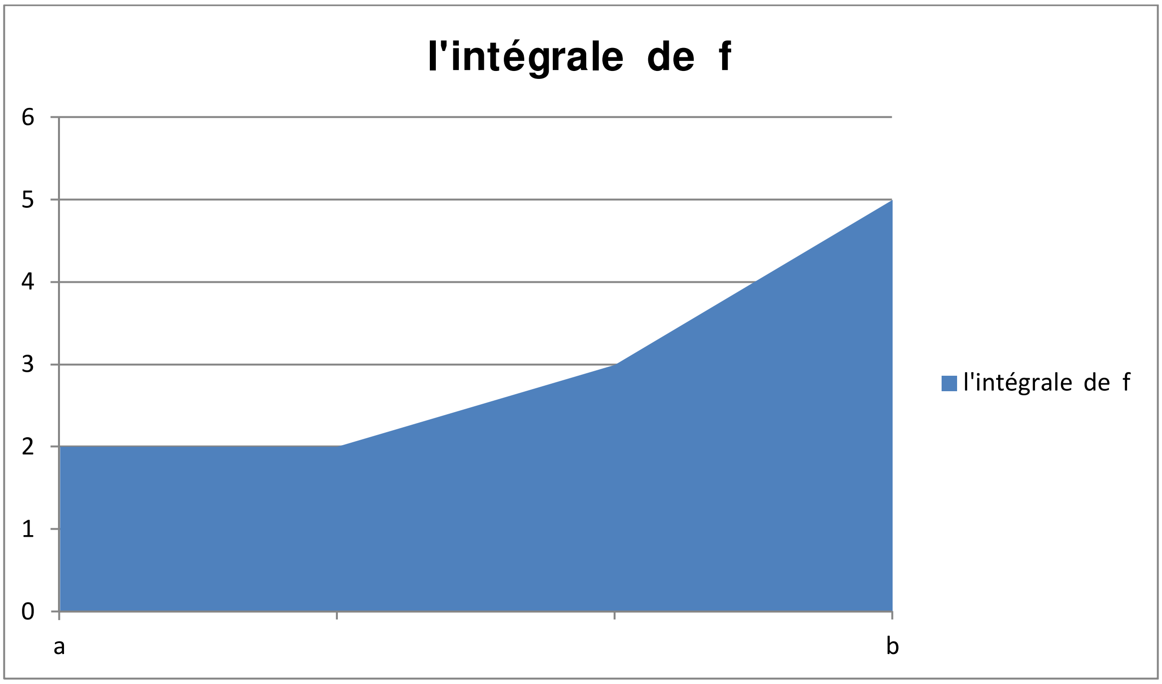
Chapitre 1: Intégrales dépendants d'un paramètre.

1-Rappel :

1.1-Présentation :

Soient a et b deux réels tels que : $a < b$ *et f une fonction positive définie sur* $[a, b]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$.

Le but de l'intégration est de calculer l'aire délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ *et* $x = b$.



Ce nombre est appelé l'intégrale de f sur $[a, b]$ *et noté :* $\int_{[a,b]} f$ *ou* $\int_a^b f(x)\,dx$.

1.2-Propriétés :

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$

1- *L'intégrale est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur* $[a, b]$.

2- *Relation de Chasles :*

$$\forall c \epsilon]a,b[: \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Ainsi, l'intégrale d'une fonction continue par morceaux est la somme d'intégrales de fonctions continues.

3- *Si f est positive sur* $[a,b]$ *alors* $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

4- *Si* $f \leq g$ *sur* $[a,b]$ *alors* $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

5- *Si f est continue par morceaux sur* $[a,b]$ *alors* $|f|$ *continue par morceaux sur* $[a,b]$ *et :* $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

6- *Inégalité de la moyenne :*

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leq sup\{|f(x)|, \quad x\epsilon[a,b]\} \int_a^b |g(x)|\,dx.$$

En particulier, $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq sup\{|f(x)|, \quad x\epsilon[a,b]\}(b-a)$.

7- *Inégalité de Cauchy-Schwartz :*

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2 dx\right).$$

Cette inégalité s'écrit aussi :

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

8- *Somme de Riemann :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(C_i)$$

où $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *est une subdivision de* $[a,b]$ *et* $C_i \epsilon [x_i, x_{i+1}]$.

1.3- Différentes méthode de calculs :

1.3.1- Théorème fondamentale de l'intégration :

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $x_0 \epsilon I$.

La fonction : $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ *est dérivable et* $\frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right) = f(x)$.

En conséquence, toute fonction réelle continue sur un intervalle I y admet des primitives.

Remarques :

1- *Si f est une fonction continue de I dans* $\mathbb{R}$ *et F est une de ses primitives alors :*

$$\forall (a,b) \epsilon I^2 : \int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

2- *Si f est de classe* C^1 *, alors :* $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$.

Exemples :

1- $\int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

2- $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [Arctant]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

3- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+cos(2t)}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

1.3.2- Intégration par parties :

Soient f et g deux fonctions de classe C^1 *sur un intervalle I et* $(a,b) \epsilon I^2$.

On a:

$$\int_a^b f'(t) g(t)\,dt = [f(t) g(t)]_a^b - \int_a^b f(t) g'(t)\,dt.$$

Exemples :

1- *Calculons :* $I = \int_0^{\pi} (x^2 + 2x)\,sinx dx$.

Posons : $\begin{cases} f'(x) = sinx \\ g(x) = x^2 + 2x \end{cases}$ *alors* $\begin{cases} f(x) = -cosx \\ g'(x) = 2x + 2 \end{cases}$.

Par suite,

$$I = [-(x^2 + 2x)cosx]_0^\pi + \int_0^\pi (2x + 2)cosxdx$$

$$= (\pi^2 + 2\pi) + 2\int_0^\pi (x + 1)cosxdx$$

Une deuxième intégration par parties nous donne :

$$I = \pi(\pi + 2) + 2[(x + 1)sinx]_0^\pi - \int_0^\pi sinxdx = \pi(\pi + 2) - 4.$$

2- *Calculons :* $J = \int_1^e (x^3 + 2x)lnxdx.$

Posons : $\begin{cases} f'(x) = x^3 + 2x \\ g(x) = lnx \end{cases}$ *alors* $\begin{cases} f(x) = \frac{x^4}{4} + x^2 \\ g'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

Par suite :

$$J = \left[\left(\frac{x^4}{4} + x^2\right) lnx\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^3}{4} + x\right) dx = \frac{e^4}{4} + e^2 - \left[\frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{2}\right]_1^e$$

$$= \frac{3}{16}e^4 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{9}{16}$$

1.3. 3- Calcul par changement de variables :

Proposition :

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $\varphi: J \to I$ *une fonction de classe* C^1.

Si $(a, b) \epsilon J^2$ *alors :*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du\,.$$

Exemples :

1- *Calculons l'intégrale suivante :* $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$

Posons $t = e^x$. *On a donc :* $dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$.

Par suite :

$$I = \int_1^e \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt = \int_1^e \frac{t+1}{\sqrt{t+1}}dt - \int_1^e \frac{1}{\sqrt{t+1}}dt$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{t+1}^3 - 2\sqrt{t+1}\right]_1^e$$

2- *Calculons :* $J = \int_e^{2e} \frac{\sqrt{lnx}}{x}dx.$

Posons : $t = lnx$. *On a donc :* $dt = \frac{dx}{x}$

Par suite : $J = \int_1^{1+ln2} \sqrt{t}\, dt = \left[\frac{2}{3}\sqrt{t}^3\right]_1^{1+ln2}.$

2- Interversion limite- intégrale et sommation- intégrale :

2.1- limite- intégrale :

2.1.1- Théorème de convergence monotone :

Soit $(f_n)_n$ *une suite de fonctions positives continues par morceaux sur un intervalle I.*

On suppose que : $\forall x \epsilon I$: $\left(f_n(x)\right)_n$ *est une suite croissante, on note* $f(x)$ *sa limite.*

La fonction f est alors continue par morceaux sur I et la suite $\left(\int_I f_n(x)dx\right)_n$ *croît vers* $\int_I f(x)dx$.

2.1.2- Lemme de Fatou :

Soit $(f_n)_n$ *une suite de fonctions positives continues par morceaux sur I.*

La fonction $\lim\ inf(f_n)$ *est alors continue par morceaux sur I et l'on a :*

$$\int_I \lim\ inf f_n(x)dx \leq \lim\ inf \int_I f_n(x)dx$$

2.1.3- Théorème de convergence dominée :

Soit $(f_n)_n$ *une suite de fonctions continues par morceaux sur I si :*

1- *La suite* $(f_n)_n$ *converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I.*

2- *Il existe une fonction* $g: I \to \mathbb{R}^+$ *continue par morceaux et intégrable sur I vérifiant la condition de domination suivante :* $\forall x \epsilon I\ \ \forall n \epsilon \mathbb{N}: |f_n(x)| \leq g(x)$.

Alors, les fonctions f_n *et f sont intégrables sur I et :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\,dx = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx$$

Exemples :

1- *Etudions* $lim_{n\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1+2sin\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2} dt$.

Posons : $\forall n \epsilon \mathbb{N}^*: f_n(t) = \frac{1+2sin\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}$ *et* $g(t) = \frac{3}{1+t^2}$.

On a bien : $\forall t \epsilon [-R, R]\ \forall n \epsilon \mathbb{N}^*:\ |f_n(t)| \leq g(t)$ *avec g est intégrable sur* $[-R, R]$.

De plus, la suite $\left(f_n(t)\right)_n$ *converge simplement vers* $\frac{1}{1+t^2}$.

Donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1 + 2sin\left(\frac{t}{n}\right)}{1 + t^2} dt = \int_{-R}^{R} \frac{1}{1 + t^2} dt = 2ArctanR$$

2- *Calculons :* $lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t^n} dt$.

2.2- Interversion sommation- intégrale :

2.2.1- Théorème d'intégration terme à terme :

Soit $(f_n)_n$ *une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, si :*

1- *La série de fonctions* $\sum f_n$ *converge simplement vers une fonction* $g = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *qui est continue par morceaux sur I.*

2- *La série numérique* $\sum \int_I |f_n(x)|dx$ *converge.*

Alors, la fonction g est intégrable sur I et

$$\int_I g(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)\,dx$$

Autrement dit,

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)\,dx$$

Exemple :

Montrons que : $\int_0^1 \frac{lnt}{t-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

On sait que : $\forall t \epsilon [0,1[: \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$

Donc, $\forall t \epsilon [0,1[: \sum_{n=0}^{+\infty} (-lnt)\, t^n = \frac{lnt}{t-1}$.

Par suite : : $\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-lnt)\, t^n\, dt = \int_0^1 \frac{lnt}{t-1} dt$.

Posons : $\forall t \epsilon]0,1[, \ \forall n \epsilon \mathbb{N} : f_n(t) = (-lnt)\, t^n$.

1- *Ces fonctions sont continues et intégrables sur* $]0,1[$, *en effet :*

$\lim_{t\to 0} \sqrt{t} f_n(t) = 0$. *Donc* $f_n(t)$ *est intégrable au voisinage de zéro.*

De plus, $\lim_{t\to 1} f_n(t) = 0$. *D'où le résultat.*

2- *La série fonctions* $\sum f_n$ *converge simplement vers la fonction* $g(t) = \frac{lnt}{t-1}$ *qui est continue sur* $]0,1[$.

3- *La série numérique* $\sum \int_0^1 |f_n(t)|dt$ *converge, en effet :*

$$\int_0^1 |f_n(t)|dt = \int_0^1 |(-lnt)\, t^n| dt = \int_0^1 (-lnt)\, t^n dt$$

Par une intégration par parties on trouve :

$\int_0^1 |f_n(t)|dt = \frac{1}{(n+1)^2}$. *d'où la série converge.*

Donc, en utilisant le théorème d'intégration terme à terme, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{lnt}{t-1}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

3-Intégrale dépendant d'un paramètre:

3.1- La fonction : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$:

3.1.1- Proposition :

Soient f une fonction continue par morceaux sur I et $a\epsilon I$.

La fonction : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *est continue sur I.*

3.1.2- Théorème :

Si f est continue sur I alors la fonction : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *est une primitive de f sur I.*

C'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

3.1.3- Remarques :

1. *Si f est continue sur I et* $a\epsilon I$ alors la *fonction :* $G(x) = \int_x^a f(t)dt$ *est dérivable sur I et* $G'(x) = -f(x)$.

2. *Si f est continue et positive sur* $[a,b]$ *alors :*

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \equiv 0 \quad sur \quad [a,b]$$

3.1.4- Proposition :

Soient f une fonction continue sur I, α *et* β *deux fonctions dérivables sur un intervalle J à valeurs dans I.*

La fonction définie sur J par : $\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$ *est dérivable sur J et :*

$$\varphi'(x) = \beta'(x)f\big(\beta(x)\big) - \alpha'(x)f\big(\alpha(x)\big)$$

3.1.5- Exemples :

1. *Soit f une fonction continue sur* $\mathbb{R}$. *La fonction :*

$F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \epsilon \mathbb{R}: F'(x) = 2f(2x) - f(x).$$

2. Considérons $G(x) = \int_{x^2}^{e^x} Arcsin(t)\,dt$ tel que $x\epsilon[-1,0]$.

   La fonction $f(t) = Arcsin(t)$ est continue sur $I = [-1,1]$, les deux fonctions $\alpha(x) = x^2$ et $\beta(x) = e^x$ sont dérivables sur $J = [-1,0]$ à valeurs dans I.

   Donc, G est dérivable sur $[-1,0]$ et

$$\forall x\epsilon[-1,0]: G'(x) = e^x Arcsin(e^x) - 2x Arcsin(x^2)$$

3.2- Fonctions définies par des intégrales :

Soient I un intervalle et f une fonction numérique définie sur $[a,b] \times I$.

Théorème 1 :

Si f est continue sur $[a,b] \times I$ alors :

$\forall y\epsilon I$, la fonction : $f_y: x \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $[a,b]$ et la fonction : $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ est continue sur I.

Théorème 2 :

Si de plus, la fonction f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ qui est continue sur $[a,b] \times I$ alors :

F est continûment dérivable sur I et

$$\forall y\epsilon I: F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

Autrement dit, pour dériver F, on peut dériver sous le signe de l'intégrale.

Théorème 3 :

Si f et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $[a,b] \times I$ et u et v deux fonctions de classe C^1 de $I \to [a,b]$ alors, la fonction G définie par :

$G(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)\,dx$ *est dérivable sur I et :*

$$G'(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx + f(v(y),y)v'(y) - f(u(y),y)u'(y)$$

Exemple :

Etudier la dérivabilité de : $G(y) = \int_{y}^{e^y} e^{x\cos y}\,dx$

3.3- Applications à des calculs d'intégrales :

La dérivation sous le signe de l'intégrale permet de calculer certaines intégrales plus rapidement surtout lorsqu'on ne connait pas de primitive.

Exemple :

Soit $t > 0$ *, calculons l'intégrale :* $F(t) = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+t^2)^2}\,dx.$

Posons : $G(t) = \int_0^1 \frac{1}{x^2+t^2}\,dx$ *et* $\varphi(x,t) = \frac{1}{x^2+t^2}.$

Il est claire que pour tout $x \in [0,1]$*,* φ *est dérivable par rapport à* t *sur* $\mathbb{R}^{+*}$ *et :*

$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t) = -\frac{2t}{(x^2+t^2)^2}$ *et cette dérivée est continue sur* $[0,1] \times \mathbb{R}^{+*}$.

Donc d'après le théorème précèdent, G est continument dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ *et sa dérivée :*

$$G'(t) = -2tF(t)$$

D'une autre part,

$$G(t) = \frac{1}{t}Arctan\left(\frac{1}{t}\right)$$

Par suite,

$$G'(t) = -\frac{1}{t^2}Arctan\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t^3}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{t^2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{t^2} Arctan\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t}\left(\frac{1}{1 + t^2}\right)$$

D'où :

$$F(t) = -\frac{1}{2t} G'(t) = \frac{1}{2t^2}\left(\frac{1}{t} Arctan\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{1 + t^2}\right)$$

Finalement,

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2 + t^2)^2} dx = \frac{1}{2t^2}\left(\frac{1}{t} Arctan\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{1 + t^2}\right)$$

3.4- Fonctions définies par une intégrale généralisée :

Soient I un intervalle et f une fonction de deux variables continue sur $]a, +\infty[\times I$.

On considère la fonction F définie sur I par :

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$$

3.4.1- Théorème1 :

S'il existe une fonction positive g définie, continue par morceaux et intégrable sur $]a, +\infty[$ *telle que :*

$$\forall (x, y) \in]a, +\infty[\times I: \ |f(x, y)| \leq g(x)$$

Alors, F existe et continue sur I.

3.4.2- Théorème2 :

Si de plus f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ *continue sur* $]a, +\infty[\times I$ *et il existe une fonction positive h définie, continue par morceaux et intégrable sur* $]a, +\infty[$ *telle que :*

$$\forall (x, y) \in]a, +\infty[\times I: \ \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leq h(x)$$

Alors, F est de classe C^1 *sur I et :*

$F'(y) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx$

Exemple :

Calculons : $I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} cos(xy)\,dx$ *pour* $y \in \mathbb{R}$.

Posons : $f(x,y) = e^{-x^2} cos(xy)$ *tel que :* $(x,y) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}$.

La fonction f est continue sur $]0,+\infty[\times \mathbb{R}$ *et :*

$$|f(x,y)| \leq g(x) = e^{-x^2} ,$$

avec g est positive continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Donc, la fonction I est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, f est dérivable par rapport à y de dérivée partielle :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -xe^{-x^2} sin(xy)$$

Il est clair que la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ *est continue sur* $]0,+\infty[\times \mathbb{R}$ *et :*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq h(x) = xe^{-x^2}$$

avec h est positive continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Alors, I est de classe C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *et :*

$$I'(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx = -\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} sin(xy)\,dx$$

En intégrant par parties, on trouve :

$$I'(y) = \left[\frac{1}{2} e^{-x^2} sin(xy)\right]_0^{+\infty} - \frac{y}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2} cos(xy)\,dx$$

$$= -\frac{y}{2} I(y)$$

Par suite, $\frac{I'(y)}{I(y)} = -\frac{y}{2}$

D'où, en intégrant par rapport à y, on a :

$$I(y) = Ce^{-\frac{y^2}{4}}$$

Or, $I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = C$

Finalement,

$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} cos(xy)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-\frac{y^2}{4}}$$

Chapitre 2: Intégrales multiples.

1- Intégrale double d'une fonction continue sur un rectangle:

1.1-Somme de Riemann :

Soit f une fonction continue sur un rectangle $R = [a,b] \times [c,d]$ *à valeurs réelles.*

Soit la subdivision de R obtenue en partageant $[a,b]$ *en m intervalles égaux et* $[c,d]$ *en n intervalles égaux.*

Alors on définit l'intégrale de f sur R par :

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \lim_{m,n\to+\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{m}\frac{d-c}{n} f(x_i,y_j)$$

1.2- Propriétés de l'intégrale double :

a. *Soit f et g deux fonctions continues sur R, on a :*

$$\iint_R \big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\big)dxdy$$

$$= \alpha \iint_R f(x,y)\,dxdy + \beta \iint_R g(x,y)\,dxdy$$

b. *Si* $\forall (x,y) \in R:\ f(x,y) \le g(x,y)$ *alors :*

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy \le \iint_R g(x,y)\,dxdy$$

c. $\left|\iint_R f(x,y)\,dxdy\right| \le \iint_R |f(x,y)|dxdy$

d. *Additivité par rapport au domaine*

Etant donné $x_0 \in]a,b[$ *et* $y_0 \in]c,d[$ *on a :*

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \iint_{[a,x_0]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy + \iint_{[x_0,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy$$

Et

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \iint_{[a,b]\times[c,y_0]} f(x,y)\,dxdy + \iint_{[a,b]\times[y_0,d]} f(x,y)\,dxdy$$

1.3- Calcul de l'intégrale double d'une fonction continue:

1.3.1- Théorème de Fubini :

Si f est continue sur $R = [a,b] \times [c,d]$ *alors :*

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy$$

Ce théorème permet donc de calculer une intégrale double par deux intégrales simples successives.

Cas particulier :

Dans le cas ou f s'écrit de la forme $f(x,y) = g(x) * h(y)$ *avec g et h sont continues sur* $[a,b]$ *resp sur* $[c,d]$*, on a :*

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \left(\int_a^b g(x)\,dx\right) * \left(\int_c^d h(y)\,dy\right)$$

Exemple :

Calculons

$$I = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{1}{x+y+1}\,dxdy$$

En utilisant le théorème de Fubini, on a :

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{x+y+1}\,dy \right) dx = \int_0^1 [ln(x+y+1)]_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 \big(ln(x+2) - ln(x+1)\big) dx$$

$$= [(x+2)ln(x+2) - (x+2)]_0^1 - [(x+1)ln(x+1) - (x+1)]_0^1$$

$$= 3ln3 - 4ln2$$

2- Extension à une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$:

2.1- Définitions :

a- Soient A une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$, f une fonction bornée de A dans $\mathbb{R}$ et $R = [a,b] \times [c,d]$ un rectangle contenant A.

On dit que f est intégrable sur A si la fonction définie sur R par :

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & si \quad (x,y) \epsilon A \\ 0 & si \quad (x,y) \notin A \end{cases}$$

est intégrable sur R et l'on pose :

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \iint_R \tilde{f}(x,y)\,dxdy$$

b- Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est dite mesurable si la fonction caractéristique χ_A est intégrable sur tout rectangle contenant A .

On appelle « mesure de A » ou « l'aire de A » le réel

$$\mu(A) = \iint_A dxdy$$

2.2- Théorème de Fubini généralisé :

2.2.1- Proposition 1 :

Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ *définie par :*

$$A = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 : \quad x\epsilon[a,b] \quad et \quad g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

Où g et h sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ *telles que :* $g \leq h.$

Si f est continue sur A, alors elle est intégrable sur A et :

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

2.2.2- Proposition 2 :

Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ *définie par :*

$$A = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 : \quad y\epsilon[c,d] \quad et \quad g(y) \leq x \leq h(y)\}$$

Où g et h sont deux fonctions continues sur $[c,d]$ *telles que :* $g \leq h.$

Si f est continue sur A, alors elle est intégrable sur A et :

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Exemple :

Calculons l'aire d'un disque $D(O,R)$.

On sait que :

$$D = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 : \qquad x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

$$= \left\{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 : \quad -R \leq x \leq R \quad et \quad -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\right\}$$

On a donc :

$$\mu(D) = \iint_D dxdy = \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \right) dx = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}dx$$

En utilisant le changement de variables :

$x = Rsint$ où $t\epsilon\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, on trouve :

$$\mu(D) = 2R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2t\,dt = R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\big(1 + cos(2t)\big)dt = R^2\left[t + \frac{sin(2t)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \pi R^2$$

D'où l'aire du disque $D(O,R)$ est $\mu(D) = \pi R^2$.

2.3- Additivité par rapport au domaine d'intégration :

Soit $A = A_1 \cup A_2$ où A_1 et A_2 sont deux parties fermées bornées telles que : $\mu(A_1 \cap A_2) = 0$. Alors :

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \iint_{A_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{A_2} f(x,y)\,dxdy$$

3- Changement de variables :

3.1- Théorème général :

Soit $f(x,y)$ une fonction continue sur un domaine D fermé borné en bijection avec un domaine Δ fermé borné tels que :

$$\forall (x,y)\epsilon D:\quad x = \varphi(u,v)\quad et\quad y = \psi(u,v)\qquad \text{où}\qquad (u,v)\epsilon\Delta$$

Et φ et ψ sont de classe C^1. Alors :

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_\Delta f\big(\varphi(u,v),\psi(u,v)\big)\; j(\varphi,\psi)(u,v)\;\, dudv$$

Où

$$j(\varphi,\psi)(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

3.2- Changement de variables affine :

3.2.1- Proposition :

Si : $x = \varphi(u,v) = x_0 + \alpha u + \beta v$

Et $y = \psi(u,v) = y_0 + \gamma u + \delta v$

Alors :

$$j(\varphi,\psi)(u,v) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \gamma\beta$$

Par suite:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f\big(\varphi(u,v),\psi(u,v)\big)(\alpha\delta - \gamma\beta)\ dudv$$

3.2.2- Exemple :

Calculons $\iint_D xydxdy$ *où*

$D = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x + y \leq 1 \ \ et \ \ -1 \leq 2x - y \leq 2\}$ *est un parallélogramme.*

Posons : $u = x + y$ *et* $v = 2x - y$

On trouve donc :

$$x = \varphi(u,v) = \frac{1}{3}(u + v) \quad et \quad y = \psi(u,v) = \frac{1}{3}(2u - v)$$

Et le jacobien est :

$$j(\varphi,\psi)(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$$

Grâce à ce changement de variables, on va intégrer sur le rectangle :

$$\Delta = \{(u,v)\epsilon\mathbb{R}^2 :\ 0 \leq u \leq 1 \ \ et \ \ -1 \leq v \leq 2\}$$

D'où :

$$\iint_D xydxdy = \iint_\Delta \frac{1}{9}(u + v)(2u - v)\left(-\frac{1}{3}\right) dudv$$

$$= -\frac{1}{27}\int_0^1 \left(\int_{-1}^2 (2u^2 + uv - v^2)\,dv\right) du$$

$$= -\frac{1}{27}\int_0^1 \left(6u^2 + \frac{3}{2}u - 3\right) du = -\frac{1}{27}\left[2u^3 + \frac{3}{4}u^2 - 3u\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{108}$$

3.3- Changement de variables en coordonnées polaires :

3.3.1- Proposition :

Soit f une fonction continue sur un domaine D fermé borné en bijection avec un domaine Δ fermé borné de $\mathbb{R}_+ \times [a, a + 2\pi]$ *ou* $a \epsilon \mathbb{R}$ *et tels que :*

$$\forall (x, y) \epsilon D: \quad x = r cos\theta \quad et \quad y = r sin\theta \qquad \text{où} \qquad (r, \theta) \epsilon \Delta$$

Alors :

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \iint_\Delta f(r cos\theta, r sin\theta) r \; dr d\theta$$

3.3.2- Exemple :

Soit $D = D(O, R)$ *et*

$$\Delta = \{(r, \theta): \quad 0 \leq r \leq R \quad et \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

On a bien :

$$\forall (x, y) \epsilon D: \quad x = r cos\theta \quad et \quad y = r sin\theta \qquad \text{où} \qquad (r, \theta) \epsilon \Delta$$

D'où,

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R f(r cos\theta, r sin\theta) r \; dr\right) d\theta$$

$$= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} f(r cos\theta, r sin\theta)\,d\theta\right) r dr$$

En particulier, pour $f(x, y) = 1$ *on a :*

$$\iint_D dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R r\ dr\right)d\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^R rdr\right) = \pi R^2$$

C'est l'aire du disque D.

4- Calculs des Aires :

4.1- En coordonnées cartésiennes :

Exemple :

Calculons l'aire du domaine Δ *délimité par les paraboles d'équations :* $y = x^2$ *et* $y = \sqrt{x}$*:*

$$\Delta = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2:\ 0 \le x \le 1 \quad et \quad x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$$

On a alors :

$$\mu(\Delta) = \iint_\Delta dxdy = \int_0^1\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\right)dx$$

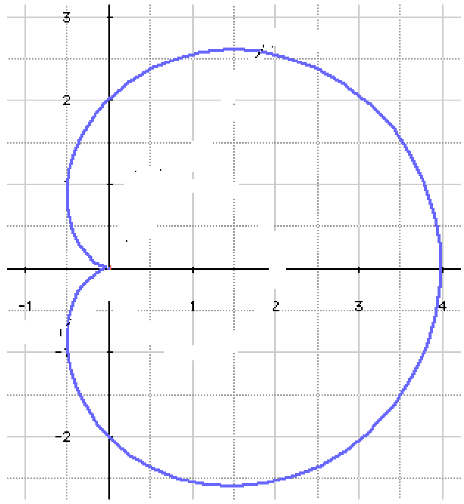
$$= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x}^3 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

4.2- En coordonnées polaires :

Exemple :

Calculons l'aire de l'intérieur d'une cardioïde définie par :

$$C = \{(r,\theta)\epsilon\mathbb{R}^2: \quad -\pi \le \theta \le \pi \quad et \quad 0 \le r \le a(1 + cos\theta)\}$$



On a :

$$\mu(C) = \iint_C r dr d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{a(1+cos\theta)} r dr \right) d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + cos\theta)^2 \, d\theta = \frac{3}{2} \pi a^2$$

5- Intégrales triples :

Dans cette section, nous généralisons les résultats précédents au cas des fonctions de trois variables.

5.1- Intégrale triple d'une fonction continue sur un pavé:

On appelle pavé, toute partie de $\mathbb{R}^3$ *de la forme :*

$$P = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$$

De même que l'intégrale double, l'intégrale triple a les propriétés de linéarité, croissance et de l'additivité par rapport au domaine.

Grâce au théorème de Fubini, le calcul d'une intégrale triple peut se ramener à trois calculs d'intégrales simples.

Si φ *est une fonction continue sur* P*, on a :*

$$\iiint_P \varphi(x,y,z) \, dxdydz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f \varphi(x,y,z) \, dz \right) dy \right) dx$$

Exemple :

Calculons : $I = \iiint_{[0,1]^3} z\cos(x+y)\,dx\,dy\,dz$

5.2- Extension à une partie bornée de $\mathbb{R}^3$:

De même, on définit les fonctions intégrables sur une partie bornée A *de* $\mathbb{R}^3$.

Une partie A est dite mesurable, si la fonction caractéristique χ_A *est intégrable sur A.*

On appelle mesure ou volume de A, le réel :

$$\mu(A) = \iiint_A dxdydz$$

Exemple :

Calculons le volume du tétraèdre A de sommets :

$O,\ P(a,0,0),\ Q(0,a,0)\ et\ R(0,0,a)$

$$\mu(A) = \iiint_A dxdydz = \int_0^a \left(\int_0^{a-x}\left(\int_0^{a-x-y} dz\right)dy\right)dx$$

$$= \int_0^a \left(\int_0^{a-x}(a-x-y)\,dy\right)dx = \int_0^a \left[(a-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{a-x} dx$$

$$= \int_0^a \left((a-x)^2 - \frac{(a-x)^2}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^a (a-x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{6}[(a-x)^3]_0^a = \frac{a^3}{6}$$

5.3- Changement de variables :

5.3.1- Changement affine :

Soit φ *une application affine bijective de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *et A une partie bornée de* $\mathbb{R}^3$.

Si une fonction f est intégrable sur $\varphi(A)$ alors $f \circ \varphi$ est intégrable sur A et l'on a :

$$\iiint_{\varphi(A)} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{A} f \circ \varphi(u,v,w) j_{\varphi}(u,v,w)\,dudvdw$$

Grâce à ce changement de variables, on peut calculer une intégrale triple sur un parallélépipède en se ramenant à une intégrale sur un pavé.

5.3.2- Changement de variables en coordonnées cylindriques :

Soient $a \epsilon \mathbb{R}$ et A une partie bornée de $\mathbb{R}_+ \times [a, a + 2\pi] \times \mathbb{R}$.

Si f est intégrable sur $\varphi(A)$ telle que :

$$\forall (r,\theta,z) \epsilon \mathbb{R}_+ \times [a, a + 2\pi] \times \mathbb{R}:$$

$$\varphi(r,\theta,z) = \big(\varphi_1(r,\theta,z), \varphi_2(r,\theta,z), \varphi_3(r,\theta,z)\big)$$

Où $\begin{cases} \varphi_1(r,\theta,z) = r cos\theta = x, \\ \varphi_2(r,\theta,z) = r sin\theta = y \\ \varphi_3(r,\theta,z) = z \end{cases}$

Alors,

$$\iiint_{\varphi(A)} f(x,y,z)\ dxdydz = \iiint_{A} f(r cos\theta, r sin\theta, z)\ r dr d\theta dz$$

5.3.3- Changement de variables en coordonnées sphériques :

Les coordonnées sphériques sont définies par l'application :

$\psi: \mathbb{R}_+ \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ *avec*
$\psi(r,\theta,\varphi) = (r\ sin\theta\ cos\varphi, r\ sin\theta\ sin\varphi, r\ cos\theta)$

Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}_+ \times [0,\pi] \times [0,2\pi]$.

Si f est intégrable sur $\psi(A)$ alors :

$$\iiint_{\psi(A)} f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz$$

$$= \iiint_{A} f(r\ sin\theta\ cos\varphi, r\ sin\theta\ sin\varphi, r\ cos\theta)r^2\ sin\theta\ dr\ d\theta\ d\varphi$$

Exemple 1:

Calculons le volume d'une boule $B(R)$ *de rayon R.*

$$\mu(B) = \iiint_{B} r^2\ sin\theta\ dr\ d\theta\ dz = \int_0^R r^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} sin\theta\ d\theta\right) d\varphi\right) dr = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Exemple 2:

Pour une ellipsoïde ε *d'équation :* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Où $a > 0$, $b > 0$ *et* $c > 0$. *On a :*

$$\mu(\varepsilon) = \iiint_{\varepsilon} dx\ dy\ dz = \iiint_{\psi(B)} dx\ dy\ dz$$

Avec $\psi : B \to \varepsilon$ *une application affine définie par :*

$$\psi(u,v,w) = (au, bv, cw)$$

Et $j_\psi(u,v,w) = abc$

D'où :

$$\mu(\varepsilon) = \iiint_{B} abc\ \ du\ dv\ dw = \frac{4}{3}\pi abc$$

Chapitre 3 : Formes différentielles

1- Formes différentielle de degré 1 dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$:

1.1-Définitions:

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou 3.

On appelle Forme différentielle de degré 1, toute application w définie sur U à valeurs dans le dual $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

En notant dx_i la i-ième projection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$, définie par :

$\forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$: $dx_i(h) = h_i$, *la forme différentielle w peut s'écrire :*

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U: \quad w(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x)\, dx_i$$

Ou $\forall i \in \{1, \dots, n\}$: $P_i : U \to \mathbb{R}$ *sont les fonctions coordonnées de w.*

Dans $\mathbb{R}^2$:

Une forme différentielle w s'écrit :

$$\forall (x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2 \quad w(x, y) = P_1(x, y)\, dx + P_2(x, y)\, dy$$

telle que :

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2 \quad w(x, y)(h, k) = P_1(x, y)\, h + P_2(x, y)\, k$$

Dans $\mathbb{R}^3$:

$$\forall (x, y, z) \in U \subset \mathbb{R}^3$$

$$w(x, y, z) = P_1(x, y, z)\, dx + P_2(x, y, z)\, dy + P_3(x, y, z)\, dz$$

1.2- Propositions :

Proposition 1 :

La forme différentielle w est de classe C^k si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, P_i est de classe C^k.

Proposition 2 :

Soit $f: U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k, $k \in \mathbb{N}^*$.

La différentielle de f :

$$df: U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \qquad x \longmapsto df(x)$$

est une forme différentielle de degré 1 de classe C^{k-1}.

Ses composantes sont les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$ de telle sorte que :

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Ce qui permet de définir la notion de primitive d'une forme différentielle.

1.3- Formes différentielles exactes :

1.3.1- Définition :

On dit qu'une forme différentielle est exacte sur U s'il existe une fonction $f: U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que : $w = df$.

On dit alors que f est une primitive de w, ou f est un potentiel pour w.

1.3.2- Remarque 1 :

Dans $\mathbb{R}^2$, pour que w soit exacte il faut que P_1 et P_2 soient respectivement les dérivées partielles par rapport à x et y d'une fonction f.

C'est à dire :

$$P_1(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad et \quad P_2(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Par suite, déterminer f revient à résoudre un système d'équations aux dérivées partielles.

Exemple :

La forme différentielle $w = \ln y \ \sin x \ dx - \frac{\cos x}{y} \ dy$

est exacte sur $]0, +\infty[$.

Déterminons f :

On a le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ln y \ \sin x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\cos x}{y} \end{cases}$$

En intégrant la première équation, on obtient :

$$f(x,y) - f(0,y) = -\ln y \,(\cos x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \ f(x,y) = f(0,y) - \ln y \,(\cos x - 1)$$

Dérivons cette expression par rapport à y, on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) - \frac{1}{y}(\cos x - 1) = -\frac{\cos x}{y}$$

On en déduit donc

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = -\frac{1}{y} \Longrightarrow f(0,y) = -\ln y + C$$

D'où

$$f(x,y) = -\ln y \,(\cos x - 1) - \ln y + C$$

$$= -\ln y \cos x + C$$

1.3.3- Remarque 2 :

Si w est une forme différentielle exacte de classe C^1 *sur* $U \subset \mathbb{R}^2$, *alors d'après le théorème de Cauchy Schwarz on trouve*

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial P_2}{\partial x}(x,y)$$

Autrement dit,

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial P_2}{\partial x}(x,y) \quad \Longrightarrow \quad w \ non \ exacte$$

Exemple :

Considérons la forme différentielle

$$w = e^x(x+y)dx + sin(xy)dy$$

On a :

$$P_1(x,y) = e^x(x+y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P_1}{\partial y}(x,y) = e^x$$

Et

$$P_2(x,y) = sin(xy) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P_2}{\partial x}(x,y) = y\,cos(xy)$$

Comme $\frac{\partial P_1}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial P_2}{\partial x}(x,y)$, *on en déduit que w est une forme différentielle non exacte.*

1.4- Formes différentielles fermées :

1.4.1- Définition :

On dit qu'une forme différentielle $w = \sum_{i=1}^{n} P_i(x)dx_i$ *est fermée, si pour tout* $i \neq j$ *dans* $[\![1,n]\!]$: $\frac{\partial P_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}(x)$

Dans $\mathbb{R}^2$ ***:***

La forme différentielle w est fermée si $\frac{\partial P_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial P_2}{\partial x}(x,y)$

Dans $\mathbb{R}^3$ ***:***

On dit que w est fermée si $\frac{\partial P_1}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial P_2}{\partial x}(x,y,z)$, $\frac{\partial P_1}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial P_3}{\partial x}(x,y,z)$ *et* $\frac{\partial P_2}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial P_3}{\partial y}(x,y,z)$

On a donc la proposition suivante :

1.4.2- Proposition :

Toute forme différentielle exacte de classe C^1 *est fermée.*

1.4.3- Remarque :

La réciproque est fausse.

Par exemple : la forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$w(x,y) = \frac{y}{x^2 + y^2}dx - \frac{x}{x^2 + y^2}dy$$

est fermée mais non exacte.

1.5- Théorème de Poincaré :

1.5.1- Définition :

Un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ *est dit étoilé s'il existe* $a \in U$ *tel que, pour tout* $x \in U$*, le segment* $[a,x]$ *est inclus dans U.*

1.5.2- Exemples :

1- Une étoile est étoilée.

2- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\ /\ x \leq 0\}$ *est étoilé.*

3- - $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *n'est pas étoilé.*

1.5.3- Théorème de Poincaré :

Si U est un ouvert étoilé et w une forme différentielle sur U, alors :

w est exacte sur U ⇔ w est fermée sur U.

2- Intégrale d'une forme différentielle de degré 1 :

2.1- Définitions :

Soit $w = P_1(x,y,z)dx + P_2(x,y,z)dy + P_3(x,y,z)dz$ *une forme différentielle continue sur un ouvert* $U \subset \mathbb{R}^3$ *et*

$\gamma: [a,b] \to U$ *un arc paramétré de classe* C^1 *défini par :*

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$$

Définition 1 :

On appelle intégrale de la forme différentielle w suivant le chemin fini γ le réel :

$$\int_\gamma w = \int_a^b w(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b P_1(\gamma(t))\,x'(t)\,dt + \int_a^b P_2(\gamma(t))\,y'(t)\,dt + \int_a^b P_3(\gamma(t))\,z'(t)\,dt$$

Exemple :

Soit

$$w(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

Calculons l'intégrale de w suivant le cercle unité :

Soit donc le chemin : $\gamma:[0{,}2\pi] \to C(0{,}1)$ *défini par :*

$$\gamma(t) = (cost, sint)$$

On a alors :

$$\int_\gamma w = \int_0^{2\pi}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}x'(t) + \frac{x}{x^2+y^2}y'(t)\right)dt$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(sin^2(t) + cos^2(t)\right)dt = 2\pi$$

Définition 2 :

On appelle « lacet » dans U, tout chemin : $\gamma:[a,b] \to U$ *fermé.*

C'est à dire : vérifiant : $\gamma(a) = \gamma(b)$.

2.2- Propositions :

2.2.1- Proposition 1 :

Si w=df est une forme différentielle exacte de classe C^1 *sur U, alors pour tout arc* $\gamma:[a,b] \to U$ *, on a :*

$$\int_\gamma w = \int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Remarque :

Si w est une forme différentielle exacte et γ *est un lacet alors :*

$$\int_{\gamma} w = 0$$

On en déduit la proposition :

2.2.2- Proposition 2 :

Soit U un ouvert étoilé.

Une forme différentielle continue w sur U est exacte si et seulement si l'intégrale de w suivant tout lacet dans U est nulle.

Remarque :

Sur un ouvert étoilé, si l'intégrale de w suivant un lacet dans U est non nulle alors w est non exacte.

Exemple :

Pour $w(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$, *l'intégrale sur le cercle unité n'est pas nulle, donc w n'est pas exacte.*

Chapitre 4 : Intégrales curvilignes.

1- Longueur d'un arc:

1.1-Définitions:

1.1.1-Définition 1 :

On appelle arc paramétré sur $\mathbb{R}^2$ *(ou* $\mathbb{R}^3$*) , toute application* $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ *définie par :* $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ *avec I est un intervalle de* $\mathbb{R}$*.*

L'ensemble : $\Gamma = \{M(t) = \gamma(t) \ / \ t\epsilon I\}$ *est appelé l'image ou support de l'arc.*

Si I est un segment, on dit que l'arc est fini ou un chemin.

1.1.2-Exemples :

1. *Soit* $D\big(A(x_0, y_0), \vec{u}(a,b)\big)$ *la droite passante par le point A et dirigée par le vecteur* $\vec{u}$ *.*

(D) est définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + bt \end{cases} \quad / \ t\epsilon\mathbb{R}$$

2. *Le cercle (C) de centre* $\Omega(x_0, y_0)$ *et de rayon R est défini par :*

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + Rcost \\ y(t) = y_0 + Rsint \end{cases} \quad / \ t\epsilon\mathbb{R}$$

1.1.3-Définition 2 :

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ *un chemin de classe* C^k*,* $k \geq 1$ *défini par :* $\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ *et* $M_0 = M(t_0)$ *est un point choisi comme origine.*

On appelle abscisse curviligne du point (t) *, la quantité :*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| du$$

Ou $\|\gamma'(u)\| = \sqrt{\left(x'(u)\right)^2 + \left(y'(u)\right)^2 + \left(z'(u)\right)^2}$

1.2-Longueur d'un arc :

1.2.1- Définition :

Si $I = [a, b]$, *on appelle longueur de* γ *le réel :*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

1.2.2-Exemple :

La longueur du cercle (C) de centre O et de rayon R qui est défini par :

$\begin{cases} x(t) = Rcost \\ y(t) = Rsint \end{cases}$ $/\ t\epsilon[0{,}2\pi]$ *est :*

$$L(C) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(Rsint)^2 + (Rcost)^2} dt = 2\pi R$$

1.2.3-Remarque :

Si $t \geq t_0$: $s(t)$ *est la longueur de l'arc entre* $M(t_0)$ *et* $M(t)$.

Si $t \leq t_0$: $s(t)$ *est l'opposé de la longueur de l'arc entre* $M(t_0)$ *et* $M(t)$.

2- Intégrale sur un chemin :

Soit w une forme différentielle continue sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ *(ou* $\mathbb{R}^3$*) , et* $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ $(n = 2$ *ou* $n = 3)$ *un arc paramétré de classe* C^1 *dont le support* Γ *est inclus dans U.*

On rappelle que l'intégrale curviligne de w le long d'un arc γ *est le réel :*

$$\int_\gamma w = \int_\Gamma w = \int_a^b w\big(\gamma(t)\big)\ \gamma'(t)\ dt$$

2.1-Propriétés :

2.1.1-Relation de Chasles :

soit $c \in [a, b]$ *, on a alors :*

$$\int_{\gamma} w = \int_{\gamma/[a,c]} w + \int_{\gamma/[c,b]} w$$

Autrement dit, si C est un point de l'arc $\widehat{AB} = \Gamma$, *alors :*

$$\int_{\widehat{AB}} w = \int_{\widehat{AC}} w + \int_{\widehat{CB}} w$$

2.1.2-Linéarité :

si w_1 *et* w_2 *sont deux formes différentielles continues sur U, alors :*

$$\forall(\alpha,\beta)\epsilon\mathbb{R}^2 : \int_{\gamma} (\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha \int_{\gamma} w_1 + \beta \int_{\gamma} w_2$$

2.1.3- Changement de paramètre :

soit γ' *un* C^1*-difféomorphisme de* $[c,d]$ *dans* $[a,b]$.

On a alors :

$$\int_{\gamma'} w = \varepsilon \int_{\gamma} w \qquad avec \begin{cases} \varepsilon = 1 & si\ \gamma'\ croissant \\ \varepsilon = -1 & si\ \gamma'\ décroissant \end{cases}$$

2.1.4-Exemples :

Calculons l'intégrale curviligne $\int_{\Gamma} (ydx - xdy)$

lorsque Γ *est l'une des courbes suivantes :*

1- $\Gamma = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 / \quad x^2 + y^2 - 2ay = 0\}$

2- $\Gamma = \left\{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 / \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$

2.2- Formule de Green-Riemann :

Soit D une partie fermée bornée du plan, limitée par un bord C de classe C^1 *par morceaux, orienté de telle façon qu'un mobile parcourant C a toujours D à sa gauche.*

2.2.1- Théorème :

Si P_1 *et* P_2 *sont des fonctions de classe* C^1 *sur D, alors :*

$$\int_{C^+} (P_1 dx + P_2 dy) = \iint_D \left(\frac{\partial P_2}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y}\right) dxdy$$

2.2.2- Remarque :

Pour trouver l'aire de D, $\mu(D) = \iint_D dxdy$ *, il suffit de trouver* P_1 *et* P_2 *de classe* C^1 *telles que :*

$$\frac{\partial P_2}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} = 1$$

1- *On peut prendre :* $P_1(x,y) = 0$ *et* $P_2(x,y) = x$ *.*

Par suite : $\mu(D) = \int_{C^+} xdy$

2- *Où bien :* $P_1(x,y) = -\frac{y}{2}$ *et* $P_2(x,y) = \frac{x}{2}$*.*

C'est à dire : $\mu(D) = \frac{1}{2}\int_{C^+}(xdy - ydx)$*.*

3- Champs de vecteurs :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$*. (n=2 ou n=3)*

3.1- Gradient :

3.1.1- Définition 1 :

On appelle champ de vecteurs sur U, toute application $\vec{F}$ *de U dans* $\mathbb{R}^n$ *qui à chaque point M associe le point* $\vec{F}(M)$*.*

3.1.2- Remarque :

Une application $\vec{F}: U \to \mathbb{R}$ *est appelée champ de scalaires.*

3.1.3- Définition 2 :

Soit $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^1 *.*

On appelle « gradient de f » le champ de vecteurs $\overrightarrow{grad} f$ *ou* $\overrightarrow{\nabla f}$ *défini sur U par :*

$$\overrightarrow{grad}_M f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(M), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(M)\right)$$

Si n=2, la composante $\frac{\partial f}{\partial z}(M)$ est ignorée.

3.1.4- Propriétés :

1. L'application : $f \longmapsto \overrightarrow{grad} f$ est une application linéaire de $C^1(U,\mathbb{R}) \to C^0(U,\mathbb{R}^n)$.
2. $\forall (f,g) \epsilon \left(C^1(U,\mathbb{R})\right)^2 : \overrightarrow{grad}(fg) = f\ \overrightarrow{grad} g + g\ \overrightarrow{grad} f$

3.1.5- Exemple :

Soit φ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(M) = \varphi\left(\left\|\overrightarrow{AM}\right\|\right)$$

Où $A(a,b)$, $M(x,y)$ et $r = \left\|\overrightarrow{AM}\right\| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

Calculons $\overrightarrow{grad} f$:

On a : $\frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{x-a}{r}\ \varphi'(r)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{y-b}{r}\ \varphi'(r)$.

Par suite :

$$\overrightarrow{grad}_M f = \varphi'\left(\left\|\overrightarrow{AM}\right\|\right) \cdot \frac{\overrightarrow{AM}}{\left\|\overrightarrow{AM}\right\|} = \frac{\varphi'(r)}{r} \cdot \overrightarrow{AM}$$

3.2- Divergence :

3.2.1- Définition :

Soit $\vec{F}: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^1, défini par :

$$\vec{F}(M) = \left(P(M), \quad Q(M), \quad R(M)\right)$$

On appelle « divergence de $\vec{F}$ » la fonction $div\vec{F}: U \to \mathbb{R}$, définie par :

$$div_M \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M)$$

Si n=2, la composante $\frac{\partial R}{\partial z}(M)$ est ignorée.

3.2.2- Propriétés :

1. L'application : $\vec{F} \longmapsto div\vec{F}$ est une application linéaire de $C^1(U,\mathbb{R}^n) \to C^0(U,\mathbb{R})$.
2. $\forall \varphi \epsilon C^1(U,\mathbb{R})$ et $\forall \vec{F} \epsilon C^1(U,\mathbb{R}^n)$:

$$div(\varphi\vec{F}) = \overrightarrow{grad}\varphi.\vec{F} + \varphi div\vec{F}$$

3.2.3- Exemple :

Soit

$$\vec{F}(M) = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|} = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) \quad ou \quad r = \|\overrightarrow{OM}\|$$

On a donc :

$$P(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad Q(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

Et $\qquad R(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Et par suite :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) = \frac{y^2 + z^2}{r^3}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) = \frac{x^2 + z^2}{r^3}$$

Et

$$\frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2}{r^3}$$

Ce qui donne : $\qquad div_M\vec{F} = \frac{2}{r}$

3.3- Laplacien :

3.3.1- Définition :

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2.

On appelle « Laplacien de f » en $M \epsilon U$, le réel :

$$\Delta_M f = div_M(\overrightarrow{grad}f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(M)$$

Si n=2, la quantité $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(M)$ est ignorée.

3.3.2- Propriétés :

1. L'application : $f \longmapsto \Delta f$ est une application linéaire de $C^2(U,\mathbb{R}) \to C^0(U,\mathbb{R})$.
2. $\forall (f,g) \epsilon \left(C^2(U,\mathbb{R})\right)^2$:
$$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\left(\overrightarrow{grad} f\right).\left(\overrightarrow{grad} g\right)$$

3.3.3- Exemple :

Soit $f(x,y,z) = sin(xy).cosz$

On a donc :

$$\Delta f = -sin(xy).cosz.[x^2 + y^2 + 1]$$

3.4- Rotationnel :

3.4.1- Définition :

On suppose ici n=3, soit $\vec{F}: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^1, défini par :

$$\vec{F}(M) = \left(P(M), \quad Q(M), \quad R(M)\right)$$

On appelle « Rotationnel de $\vec{F}$ », le champ vectoriel $\overrightarrow{rot}\vec{F}$ défini par :

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

3.4.2- Propriétés :

1. L'application : $\vec{F} \longmapsto \overrightarrow{rot}\vec{F}$ est une application linéaire de $C^1(U,\mathbb{R}^3) \to C^0(U,\mathbb{R}^3)$.
2. $\forall \varphi \epsilon C^1(U,\mathbb{R}), \forall \vec{F} \epsilon C^1(U,\mathbb{R}^3)$:
$$\overrightarrow{rot}\left(\varphi\,\vec{F}\right) = \varphi\ \overrightarrow{rot}\vec{F} + \overrightarrow{grad}\varphi \wedge \vec{F}$$

3.4.3- Exemples :

1. Si $\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{z}, \frac{z}{r}\right)$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Alors : $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right) = \vec{0}$

2. Si $\vec{F}(x,y,z) = (z,x,y)$ alors : $\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = (1,1,1)$

3.4.4- Proposition :

Si $\vec{F}$ dérive d'un potentiel f, $\vec{F} = \overrightarrow{grad}f$, alors : $\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$.

Réciproquement, si : $\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ et si U est étoilé alors $\vec{F}$ admet un potentiel scalaire.

3.5- Circulation, intégrale curviligne :

3.5.1- Définition :

Soit $\gamma:[a,b] \to U$ un arc paramétré orienté de classe C^1 par morceaux dont le support Γ , et $\vec{F}$ un champ vectoriel continu sur U.

L'intégrale $\int_a^b \vec{F}(\gamma(t)).\gamma'(t)dt$ est appelé « intégrale curviligne » ou « circulation de $\vec{F}$ sur Γ »

On la note : $\oint_\Gamma \vec{F}(M)\overrightarrow{dM}$.

3.5.2- Exemple :

Si $\vec{F}(x,y) = (P(x,y),\ Q(x,y))$ alors :

$$\oint_\Gamma \vec{F}(M)\overrightarrow{dM} = \int_a^b \big(P(x,y)x'(t) + Q(x,y)y'(t)\big)dt$$

3.5.3- Proposition :

Si $\vec{F}$ dérive d'un potentiel f, $\vec{F} = \overrightarrow{grad}f$, alors :

$$\oint_\Gamma \vec{F}(M)\overrightarrow{dM} = f(B) - f(A)$$

Où A et B sont respectivement l'origine et l'extrémité de Γ.

3.5.4- Formule de Green - Riemann :

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ limité par un bord ∂D de classe C^1 par morceaux et orienté.

Si $\vec{F}(x,y) = (P(x,y),\ Q(x,y))$ est un champ vectoriel de classe C^1 alors :

$$\oint_{\partial D} \vec{F}(M)\,\overrightarrow{dM} = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

3.5.5- Formule d'Ostrogradsky :

Soit $\vec{F}$ un champ vectoriel de classe C^1 sur un volume V de $\mathbb{R}^3$, ∂V la frontière de V et $\overrightarrow{ds}$ le vecteur normal à la surface dirigée vers l'extérieur et de longueur égale à l'élément de surface qu'il représente.

On a alors :

$$\iiint_{V} div\vec{F}.dv = \oiint_{\partial V} \vec{F}.\overrightarrow{ds}$$